Chapitre 27 : Dénombrement

1 Rappels sur les cardinaux et principes de dénombrement

1.1 Principe de bijection

Théorème 1.1. Deux ensembles finis en bijection ont le même cardinal.

Principe de bijection :
On peut compter des objets en les mettant en bijection avec d'autres objets.

1.2 Principe d'addition

Proposition 1.2. Soit Ω un ensemble.

* Si E et F sont des parties disjointes et finies de Ω, alors $E \cup F$ est finie et

$$|E \cup F| = |E| + |F|$$

* Si $E_1, \dots, E_p$ sont des parties finie deux à deux disjointes, alors $\bigcup\limits_{k=1}^{p} E_k$ est finie et

$$\left| \bigcup_{k=1}^{p} E_k \right| = \sum_{k=1}^{p} |E_k|$$

* De manière générale, si E et F sont des parties finies de Ω, alors $E \cup F$ est finie et

$$|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$$

Principe d'addition :
Des objets que l'on souhaite compter se regroupent en un certain nombre de catégories mutuellement exclusives. Alors le nombre total d'objets est la somme du nombre d'objets de chaque catégorie.

1.3 Principe de soustraction

Corollaire 1.3. Soit E un ensemble fini et $F \subseteq E$ une partie. Alors

$$|E \setminus F| = |E| - |F|$$

Principe de soustraction :
Si des objets peuvent ou non avoir une certaine propriété, le nombre d'objets ayant la propriété est égal à la différence entre le nombre total d'objets et le nombre d'objets n'ayant pas la propriété.

1.4 Principe de multiplication

Proposition 1.4. Soit E et F deux ensemble finis. Alors $E \times F$ est fini et a pour cardinal $|E \times F| = |E| \times |F|$

Principe de multiplication :
S'il y a n_1 manières de faire une première opération, n_2 manières de faire une deuxième opération, et ainsi de suite jusqu'à n_p manières de faire une dernière opération, il y a $n_1 n_2 ... n_p$ manières de faire ces p opérations à la suite.
C'est le genre de choses que l'on peut faire avec un arbre.

1.5 Principe de division - lemme des bergers

Corollaire 1.5 (Lemme des bergers).
Si un ensemble de cardinal n est partitionné en k classes de cardinal $d > 0$, alors $k = \frac{n}{d}$

2 Dénombrements basiques

2.1 Listes (ou n-uplets, ou applications)

Proposition 2.1 (Applications). Soit E et F deux ensembles finis. Alors F^E est fini et

$$\left|F^E\right| = |F|^{|E|}$$

2.2 Listes sans répétition (ou arrangements, ou applications injectives)

Proposition 2.2 (Applications injectives). Soit E et F deux ensembles finis, de cardinaux respectifs n et m
Le nombre d'applications injectives $E \to F$ est

$$\begin{cases} m(m-1)...(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ si } n \leq m \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2.3 Permutations

Proposition 2.3. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $|\mathfrak{S}(n)| = n!$

2.4 Parties (ou combinaisons)

Proposition 2.4. Soit E un ensemble fini. On a $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

Proposition 2.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, tous les ensembles de cardinal n possèdent le même nombre de parties de cardinal k, à savoir

$$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k([\![1, n]\!])| = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } 0 \leq k \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2.5 Anagrammes

<u>Remarque</u> : On dit <u>une</u> anagramme.

Proposition 2.6.

- Le mot $\underbrace{aa...a}_{k}\underbrace{bb...b}_{n-k}$ possède $\binom{n}{k}$ anagrammes.

  Autrement dit, il y a $\binom{n}{k}$ mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b\}$ avec k occurrences de la lettre a
- Plus généralement, si $n = k_1 + ... + k_r$, le mot $\underbrace{a_1a_1...a_1}_{k_1}\underbrace{a_2a_2...a_2}_{k_2} ... \underbrace{a_ra_r...a_r}_{k_r}$ possède

  $$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_r!}$$

  anagrammes. (coefficient multinomial)

2.6 Compositions (ou multiensembles, ou *bars and stars*)

Proposition 2.7. Soit $r, n \in \mathbb{N}$. Il y a $\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$ listes $(w_1, \dots, w_r) \in \mathbb{N}^r$ telles que $\sum_{i=1}^{r} w_i = n$

Corollaire 2.8. Soit $r, n \in \mathbb{N}$. Il y a $\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r}$ listes $(w_1, \dots, w_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ telles que $\sum_{i=1}^{r} w_i = n$

3 Compléments sur les coefficients binomiaux

3.1 Formule d'absorption

Proposition 3.1. Soit $0 \leq k \leq n$ deux entiers. On a

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

3.2 Formule de convolution de Vandermonde

Proposition 3.2. Soit k, p et q trois nombres entiers tels que $0 \leq k \leq p+q$. On a

$$\binom{p+q}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{p}{i}\binom{q}{k-i} = \sum_{i+j=k}\binom{p}{i}\binom{q}{j}$$

3.3 Formule de sommation de l'indice du haut

Proposition 3.3. Soit $0 \leq k \leq n$ deux entiers. On a

$$\sum_{p=k}^{n}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$